CHRISTOPH DRÖSSER

CSÁBÍTÓ SZÁMOK, AVAGY A MINDENNAPOK MATEMATIKÁJA

MEGOLDÁSOK

16. oldal

Ha négy emberrel számolunk négyzetméterenként, akkor mindenkire egy negyed négyzetméteres, azaz egy fél méterszer fél méteres terület jut, ami még viszonylag kényelmesnek mondható. A Balaton felszínét (594 km^2 = 594 000 000 m^2) ezzel elosztva azt kapjuk, hogy körülbelül 2,38 milliárd ember férne el a tavon. Ez valamivel több, mint a Föld lakosságának egyharmada.

24. oldal

A trükk az, hogy azt számoljuk ki, mi a valószínűsége annak, hogy mindenki születésnapja más napra esik. Két főre nézve annak a valószínűsége, hogy B születésnapja nem esik egybe A születésnapjával: 364/365. Ha hozzávesszük egy harmadik személyt, C-t, akkor neki az év 365 napjából még 363 napon lehet a születésnapja. És így tovább! Ezeket összeszorozzuk

$$\frac{364 \cdot 363 \cdot 362\ldots}{365 \cdot 365 \cdot 365\ldots}$$

addig, amíg az eredmény 1/2-nél kevesebb nem lesz. Ez 23 főnél következik be. Tehát ennél nagyobb társaságban 50%-nál kisebb annak az esélye, hogy mindenki máskor ünnepli a születésnapját, vagyis több mint 50% a valószínűsége, hogy két vendégnek ugyanakkor van a születésnapja.

31. oldal

Úttakarítás: 10 hókotró 9 perc alatt végez a munkával. Whisky és víz: a feladatot meg lehet oldani egyrészt arányossági feladatként, másrészt némi belegondolással is. A végén mindkét pohárban ugyanannyi folyadék van, vagyis a vízben annyi whiskynek kell lennie, mint amennyi víz került a whiskybe.

40. oldal

Az átlagsebesség nem a két sebesség átlaga (10 km/h), hanem

$$v = \frac{2 \cdot v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2} = 9{,}6$$

(Ez a sebességek úgynevezett harmonikus közepe.)

Magyarázat: Ha az A és B pontok közötti távolság *s* kilométer, a futó sebessége pedig 12 km/h, akkor a $t = s/v$ képlettel számolva

$$t_1 = \frac{s}{12}$$

időre van szüksége az odaúton.

Visszafelé 8 km/h-s sebességgel tovább tart az út, nevezetesen

$$t_2 = \frac{s}{8}$$

Az átlagsebességet úgy kapjuk meg, hogy az összes utat osztjuk a teljes idővel, vagyis:

$$v = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{12} + \frac{s}{8}} = \frac{2s}{\frac{3s + 2s}{24}} = \frac{48s}{5s} = 9{,}6$$

51. oldal

Összesen 315 puszit adnak, és 210-szer fognak kezet. (Tipp: egy házaspár tagjai együtt mennek haza, így egymástól nyilván nem búcsúznak el.)

MAGYARÁZAT:

Ha 15 férfi van a társaságban, akkor egy adott férfi 14-szer fog kezet a többiekkel. 15 férfi így $15 \cdot 14$-szer fog kezet összesen, de mivel ebben az összesítésben mindenki oda-vissza fogott kezet mindenkivel, kettővel el kell osztanunk az eredményt, így

$\frac{15 \cdot 14}{2}$-t,

azaz 105-öt kapunk. Hasonlóan járhatunk el a nők közötti puszik számát illetően is, de mivel ők két puszit adnak, az előző megoldást kettővel szorozni kell, így 210-et kapunk eredményül.

A férfiak és nők közötti kézfogások esetében is épp a fenti képletre van szükségünk. Itt ugyan elvileg mind a 15 férfi mind a 15 nővel kezet foghatna, de a házastársak miatt egy fő mindig kimarad, így a képlet nem változik. Hasonlóan számolhatjuk össze a puszikat is.

MEGJEGYZÉS:

Az egyes számítások egyenértékűek a következő kérdéssel: hányféleképpen vehetünk ki két golyót egy 15 különböző golyót tartalmazó urnából visszarakás és a sorrendre való tekintet nélkül? A választ a Függelék végén található 2b. képlettel tudjuk megadni, ami természetesen ugyanazt adja eredményül, mint az imént bemutatott megoldás.

■ *61. oldal*

Egyikőjüknek sincs igaza, de mindhárom érvben van valami igazság. Nem létezik egyedül üdvözítő módszer egy ilyen választás nyertesének a meghatározására. A választás előtt kell eldöntenünk, hogy milyen szempontokat tartunk fontosnak, és ennek megfelelően előre választani egyet a módszerek közül.

■ *72. oldal*

Ha a háztartások 55%-ában csak egyvalaki él, akkor a háztartások 45%-ában legalább ketten élnek. Ha pont ketten lennének, akkor 100 háztartásban összesen $(55 + 2 \cdot 45)$, azaz 145-en élnének, így az egyedül élők aránya körülbelül 38% lenne (55/145). A valóságban még kisebb ez az arány, hisz a háztartások egy részében nem csak ketten élnek.

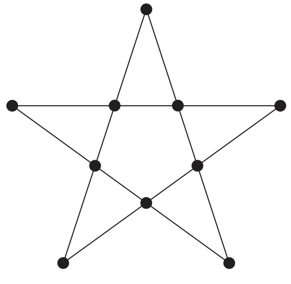
■ *84. oldal*

Ha a kabátok száma n, akkor $n!$ („n faktoriális", vagyis $n \cdot (n-1) \cdot \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$) féleképpen lehet kiosztani a kabátokat. Az a kérdés, hogy hány olyan permutáció, vagyis sorrend van, melynek létezik fixpontja, vagyis akad legalább egy olyan vendég, aki a saját kabátját kapja vissza. Ennek meghatározásához először megpróbáljuk megkeresni a fixpontmentes permutációkat, vagyis az olyan sorrendek számát, amelyeknél minden összekeveredik. Némi gondolkodás után rájövünk, hogy ha tudjuk, hogy $n-1$ és $n-2$ kabát esetén hány fixpontmentes permutáció létezik (jelöljük ezeket f_{n-1}, f_{n-2}-vel), akkor meg tudjuk határozni ugyanezt n kabátra vonatkozóan is. Hogyan lehet $n-1$ kabát sorrendezve, ha ebből egy kabátot hozzávéve n kabát egy fixpontmentes sorrendjét kapjuk? Lehet, hogy az $n-1$ kabát is fixpontmentes sorrendben volt (f_{n-1}), ekkor az újabb kabátot bármelyikkel kicserélve (ez $n-1$ féleképp lehetséges) egy n hosszú fixpontmentes sorrendet kapunk. Vagy az $n-1$ kabát közül pont egy volt a saját helyén (ez is $n-1$ féleképp történhet), a maradék $n-2$ kabát fixpontmentesen volt sorrendezve (f_{n-2}), és ezt a fixpontot szüntetjük meg azzal, hogy kicseréljük az újabb kabáttal. Tehát:

$$f_n = (n-1) \cdot (f_{n-1} + f_{n-2})$$

Ha ezeket az értékeket sorra kiszámoljuk, $f_1 = 0$ és $f_2 = 1$-gyel kezdve, akkor már 6 kabát esetén is 36,8% körül van a fixpontmentes permutációk aránya, és nagyobb értékekre sem változik jelentősen. (A pontos arány $1/e$, ahol e a könyvben többször említett Euler-féle szám.) Ez azt jelenti, hogy 63,3% annak a valószínűsége, hogy legalább egy vendég a saját kabátját kapja vissza.

97. oldal



106. oldal

Itt is egy tipikus Simpson-paradoxonnal állunk szemben. A táblázat szerint minden korcsoportban jobbak a nemdohányzók túlélési esélyei. Az összesítés azonban – mely azt mutatja, hogy a dohányzók esélyei jobbak – torz képet mutat, ugyanis a dohányzók közül lényegesen kevesebben élik meg egyáltalán a 65. életévüket, mint a nemdohányzók közül. Tehát a nemdohányzók között jóval több 65 év feletti van, így nyilván nagyobb számban halnak is meg.

120. oldal

Ha Hasselhoff s_1 utat fut a homokban és s_2 hosszú utat úszik, akkor így kapjuk meg, hogy mennyi idő alatt éri el Pamelát:

$$t = \frac{s_1}{5} + \frac{s_2}{2}$$

Püthagorasz tételével minden x pontra, ahol a vízi mentő a tengerbe vetheti magát, ki tudjuk számolni a megfelelő időt. Így kapunk egy $t(x)$ függvényt, melynek a minimumát határozzuk meg. Eredmény: legjobb, ha majdnem addig a pontig elfut, ahonnan a legrövidebb szakaszt kellene úsznia. (Pontosabban: 7,8 méterrel ez előtt a pont előtt kellene vízbe ugrania.)

132. oldal

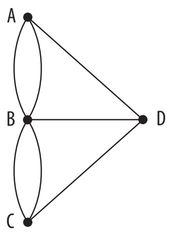
Itt is van egy trükk, ami segít. Úgy képzeljük el, hogy a második dominót az első alá toljuk, aztán a harmadikat az első kettő alá úgy, hogy az egész építmény még épp egyensúlyban legyen. Ha az első 2 egység széles, akkor a második dominót egy egységgel eltolva kell az első alá helyezni. A következőket rendre 1/2, 1/3, 1/4 egységgel eltolva, és így tovább. Az eltolás mértéke láthatóan egyre kisebb. Az alábbi összefüggést kapjuk az összes eltolásra:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

Ennek a sorozatnak azonban nincs véges határértéke, azaz minden határon túl nő. Tehát a dominókkal tetszőlegesen nagy távolságot is át tudunk hidalni.

143. oldal

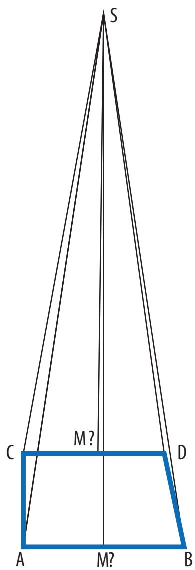
A megoldáshoz jelöljük az A, B, C és D partokat egy-egy ponttal, az őket összekötő hidakat pedig egy-egy szakasszal:



Le tudjuk rajzolni ezt a gráfot egy vonallal? Ha ez lehetséges lenne, akkor legföljebb két olyan pont lenne, amelyekből páratlan sok él fut ki (a kezdő és a végpont). Az összes többi esetben minden bejövő él tovább is megy. Az ábrán azonban mindegyik pontból páratlan számú él indul, tehát a vasárnapi séta nem lehetséges.

151. oldal

A hiba a rajzban van. Ugyanis az S pont lényegesen magasabban fekszik, el sem fér a lapon. Íme egy ábra, melyen az egyik szög derékszög, a másik 80°, de ugyanaz a probléma. Láthatjuk, hogy a BDS háromszög kívül fekszik, vagyis a D pont balra van a BS élhez képest, és így az egész érvelés megdől, hisz a DBA szöget így nem a két szög összege, hanem különbsége adja meg.



161. oldal

„A csövek frekvenciája fordítottan arányos a hosszuk négyzetével.” Ez azt jelenti, hogy:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{l_2^2}{l_1^2}$$

Ha a frekvenciát szeretnénk megduplázni, akkor a rúd hosszát negyedére kell változtatnunk.

178. oldal

Az adatokból egy kétismeretlenes egyenletrendszert tudunk felírni. Ha k jelöli a gyerek, m pedig az anya életkorát, akkor:

$$k = m - 21$$
$$5 \cdot (k + 6) = m + 6$$

Mindkét egyenletből kifejezzük m-et:

$$m = k + 21$$
$$m = 5k + 24$$

Így a jobb oldali kifejezések is megegyeznek, tehát:

$$k + 21 = 5k + 24$$
$$4k = -3$$
$$k = -\frac{3}{4}$$

A gyerek életkorára egy negatív értéket kapunk, nevezetesen –9 hónapot.

189. oldal

Egy kör sugarát megkapjuk, ha a kerületét elosztjuk 2π-vel. Ha egy méterrel növeljük az öv hosszát, vagyis a kör kerületét, akkor a sugár $1/2\pi = 0{,}16$ méterrel nő. Tehát az öv 16 centiméterrel a felszín fölött fut, ami bőven elég az egérkének.